

Mathematik und Physik

Ausgewählte Essays

YURI I. MANIN

Inhaltsverzeichnis

Mathematik und Physik	9
Vorwort	11
1. Mathematik aus der Vogelperspektive	17
2. Physikalische Größen, Dimensionen und Konstanten: Die Quelle von Zahlen in der Physik	65
3. Ein Tropfen Milch oder Beobachter, Beobach- tung, Beobachtbares und nicht Beobachtbares	95
4. Die Raumzeit als physikalisches System	125
5. Wirkung und Symmetrie	151
Das Verhältnis von Mathematik und Physik	171
Gedanken über arithmetische Physik	197
Impressum	219



Mathematik und Physik



Es gibt eine Überlieferung, wie ein berühmter Mathematiker seine Logikvorlesung für das 2. Studienjahr begann: »Logik – das ist die Wissenschaft über die Gesetze des Denkens«, verkündete er, »Jetzt muss ich Ihnen erklären, was das ist, die Wissenschaft, was Gesetze sind und was das Denken ist. Das ‚über‘ werde ich nicht erklären.«

Als der Autor das Buch *Mathematik und Physik* zu schreiben begann, verstand er, dass dessen Umfang kaum reichen würde, das *und* im Titel zu erklären. Zwei Wissenschaften, die früher ein Zweig am Baum der Erkenntnis waren, haben sich heute weit voneinander entfernt. Eine der Ursachen dafür ist, dass sich beide im letzten Jahrhundert aktiv mit ihrem Selbstverständnis beschäftigt haben, d.h. sie entwickelten mit ihren Werkzeugen ihre eigenen Modelle. Die Physik bewegte die Wechselbeziehung des Denkens und der Realität, und die Mathematik die des Denkens und der Formeln. Beide diese Beziehungen erwiesen sich als viel komplexer als früher angenommen, und die Modelle, Selbstporträts und Selbstbildnisse der beiden Disziplinen wurden sehr verschieden. Im Ergebnis lehrt man schon im Studium die Physiker und Mathematiker ganz verschieden zu denken. Es wäre wunderbar, beide Arten des professionellen Denkens wenigstens so zu beherrschen, wie man die rechte und die linke Hand beherrscht.

Aber dieses kleine Buch kommt aus einer Hand. Der Autor, von der Ausbildung her Mathematiker, hat einmal den Studenten vier Vorlesungen unter dem Titel *Wie ein Mathematiker die Physik lernen sollte* gehalten. In den Vorlesungen sprach er davon, dass die moderne theoretische Physik eine prachtvolle, vollkommen rabelaisische, vollblütige Gedankenwelt ist, und der Mathematiker in ihr alles finden kann, wonach ihm der Sinn steht – nur nicht die Ordnung, an die er gewöhnt ist. Um sich auf das Physikstudium vorzubereiten, wäre es eine gute Methode, so zu tun, als ob man endlich versucht, in ihr aufzuräumen.

In dem kleinen Buch, das aus diesen Vorlesungen und weiteren Gedanken hervorgegangen ist, habe ich versucht, einige grundlegende Kategorien dieser zwei Wissenschaften hervorzuheben und gegenüberzustellen. Auf dem höchsten Abstraktionsniveau verlieren diese Gedankengänge an begrifflicher Genauigkeit und werden zu kulturellen Symbolen der Zeit: Nehmen wir doch das Schicksal der Worte *Evolution*, *Relativität* oder *Unterbewusstes*. Hier gehen wir ein Stufe tiefer und diskutieren die Worte, welche noch nicht Symbole, aber fast nicht mehr Begriffe sind: *Menge*, *Symmetrie*, *Raumzeit*. (Siehe M. M. Bachtins Versuch, die terminologische Einführung dieser Begriffe in die Literaturwissenschaft mit Hilfe des absichtlich verfremdenden Chronotopos-Begriffes.) Einige dieser Worte stehen in den Kapitelüberschriften. Jeder Leser soll sich der ursprünglichen mentalen Bilder dieser Begriffe bewusst sein, Bilder, die physikalische Assoziationen im weitesten Sinne des Wortes sind.

Der Autor wollte zeigen, wie Mathematik mit solchen physikalischen Gedanken neue Vorstellungen schafft, die für den gebildeten Verstand nahezu fühlbar, aber doch weit entfernt von den direkten alltäglichen und physikalischen Erfahrungen sind. Sagen wir mal, dass sich die Bewegung von Planeten im Sonnensystem für einen Mathematiker wie Stromlinien einer inkompressiblen Flüssigkeit im 54-dimensionalen Phasenraum darstellt, dessen Volumen mit dem Liouville-Maß berechnet wird.

Dem Leser kann es Willenskraft abverlangen, in der Mathematik einen Erzieher zu anschaulichem Denken zu sehen. Oftmals wird sie mit strenger Logik oder Berechnungsformalismus in Verbindung gebracht. Aber dies ist nur die Disziplin, das Lineal, durch das man uns lehrt, nicht zu sterben.¹

Der Berechnungsformalismus der Mathematik – das ist ein Gedanke, der sich zu einem solchen Grade verselbständigt hat, dass er sich zeitweilig entfremdet hat und zu einem technologischen Prozess geworden ist.

1 Ein Wortspiel, das sich auf Boris Pasternaks Gedicht *Für Brjussow* bezieht.
(Anm. der Übersetzer)

Ein mathematisches Bild formiert sich durch die verzögerte Anbindung dieses zeitweilig abgetrennten Gedankens an den Menschen. Zu denken – das heißt mit kritischem Bewusstsein rechnen.

Die verrückte Idee, welche zukünftigen fundamentalen physikalischen Theorien zugrunde liegen wird, wird die Bewusstwerdung darüber sein, dass der physikalische Sinn irgendein mathematisches Bild benötigt, welches ehemals nichts mit der Realität zu tun hatte. Von diesem Standpunkt aus ist das Problem der verrückten Idee ein Problem der Auswahl und nicht der Generierung. Man muss das nicht zu wörtlich nehmen. In den 1960er Jahren wurde gesagt, dass die wichtigste Entdeckung der Physik der letzten Jahre die komplexen Zahlen seien. Der Autor hat so etwas Ähnliches im Sinn.

Ich werde mich nicht für die Subjektivität der Meinungen und der Materialauswahl entschuldigen. Galilei, Maxwell, Einstein, Poincaré, Feynman, Wigner schrieben über Physik und Mathematik; nur die Hoffnung, etwas Subjektives zu sagen, rechtfertigt einen neuen Versuch.



1. Mathematik aus der Vogelperspektive

Mathematische Wahrheit

Wahrscheinlich ist die einfachste mathematische Tätigkeit eine arithmetische Berechnung der folgenden Art:

$$\frac{0,25}{20} \cdot \frac{\sqrt{13}}{1,1} \cdot \frac{7,8 \cdot 10^4}{2,04 \cdot 10^5} \cdot \frac{2 \cdot 0,048}{0,021 + 0,019}$$

Das reale Beispiel stammt nicht aus einem Aufgabenbuch für die Schule, sondern aus einem Artikel von Enrico Fermi *Über die Absorption und die Diffusion von langsamen Neutronen*.¹ Lassen Sie uns etwas über den Sinn solcher Rechnungen nachdenken.

(a) Zur Prüfung dieser Gleichung kann man annehmen, dass es hier um ganze Zahlen geht (nehmen wir das Quadrat, entfernen den Nenner und skalieren wir so, dass ein Tausendstel die Einheit wird.) Unsere Gleichung kann dann als eine Vorhersage des Ergebnisses eines physikalischen Experiments betrachtet werden, das in Folgendem besteht: Nimm zwei Gruppen von je 48 Objekten ($2 \cdot 0,048$), wiederhole das 78 000 mal ($7,8 \cdot 10^4$) usw. Wie in der ersten Klasse kann man Stöckchen zu Gruppen anordnen, um den Sinn des Zählens, der ganzen Zahlen, Addition und Multiplikation wie auch den Sinn arithmetischer Identitäten zu erklären. Deshalb kann man sich selbstverständlich vorstellen, dass die Arithmetik ganzer Zahlen *die Physik des Sammelns von Objekten in Häufchen* ist.

(b) Trotzdem wird die praktische Berechnung natürlich anders ausgeführt: Sie besteht aus einer Serie von einigen Standardumformungen auf der linken Seite einer Identität. Wir wählen eine Gruppe von Symbolen links, sagen wir $0,25/20$ und ersetzen sie durch $0,0125$ mittels Schulbuchre-

¹ Amaldi and E. Fermi: *On the Absorption and the Diffusion of Slow Neutrons*, Phys. Rev. **50**, 899, 1936 ~ im Original (Anm. d. Übers.)

zepten usw. Alle Regeln, eingeschlossen die Regel über die Reihenfolge der Aktionen, kann man vorher formulieren. Die Korrektheit der Rechnung besteht in der grammatikalischen (rezeptiven) Richtigkeit; sie garantiert die *physikalische Wahrheit* des Resultates. (Selbstverständlich hat Fermi die linke Seite gerundet; auch ohne genaue Berechnung ist klar, dass die Gleichung nicht buchstäblich richtig sein kann, weil ja $\sqrt{13}$ irrational ist.

(c) Für Fermi wird der Sinn dieser Rechnung durch folgende Phrase zusammengefasst: »Die Gruppe A ... erweist sich als so enges Energieband, das im Prozess der Verzögerung nur 4 % der Neutronen passieren können« (4 % sind die 0,038 der rechten Seite). Klar, dass wir nicht unmittelbar zu einer solchen Herleitung kommen können, wie wir uns auch immer den Sinn arithmetischer Rechnungen vorstellen. Weder die Aufteilung in 78 000 Häufchen mit jeweils 96 Gegenständen, noch die Division von 0,096 durch 0,04 haben irgendeine Beziehung zu den Neutronen. Die mathematische Betrachtung geht in den physikalischen Text zusammen mit dem Akt seiner physikalischen Interpretation ein, gerade dieser Akt ist das Auffallendste der modernen Physik.

Und so haben wir schon drei Aspekte mathematischer Wahrheit in unserem einfachen Beispiel gefunden. Man kann sie bedingt als *inhaltliche Wahrheit*, *formale Richtigkeit* oder *Beweisbarkeit* und *Adäquatheit physikalischer Modelle* bezeichnen.

Für die in sich abgeschlossene Mathematik sind nur die ersten beiden Aspekte wesentlich, und erst das 20. Jahrhundert brachte das Verständnis der Unterschiede der beiden Aspekte. Betrachten wir eine solche einfach formulierbare Behauptung wie die fermatsche Hypothese. Obwohl wir sie weder beweisen noch widerlegen können, sind wir sicher, dass sie entweder wahr oder falsch ist.² Dieses Vertrauen begründet sich

2 Der große fermatsche Satz wurde 1994 von Andrew Wiles und Richard Taylor bewiesen. (Anm. der Übers.)

in der abstrakten Möglichkeit, unendlich viele arithmetische Operationen durchzuführen (oder *Aufteilungen in Haufen*), indem man alle Summen von Potenzen ganzer Zahlen vergleicht. Im Allgemeinen beinhaltet der Begriff der Wahrheit (der Mehrzahl) mathematischer Behauptungen die Vorstellung solcher unendlicher Serien von Vergleichen. Allerdings ist jeder mathematische Beweis, d.h. eine Schlussfolgerung, die aus einer Folge von Anwendungen von Axiomen oder logischen Herleitungsregeln besteht, eine endliche Prozedur. K. Gödel zeigte in den 30er Jahren, dass aus diesem Grund die Beweisbarkeit bedeutend enger als die inhaltliche Wahrheit ist, selbst wenn wir nur über ganze Zahlen reden. Dabei ist es ganz gleich, von welchen Axiomen wir ausgehen, sie müssen nur inhaltlich wahr sein und durch eine endlichen Liste (oder eine endliche Anzahl von Regeln ihrer Ableitung) gegeben sein. Dieser Unterschied zwischen inhaltlicher Wahrheit und Beweisbarkeit ist weit bekannt, aber es zeigt sich, dass seine Folgen kaum verstanden wurden. In der Literatur werden oft Probleme der Reduzierbarkeit betrachtet: Reduziert sich Biologie oder Chemie auf die Physik? Offensichtlich kann die Rede nur von einem theoretischen Modell von physikalischen, biologischen und chemischen Phänomenen sein, das hinreichend mathematisiert ist. Doch dann muss man erklären, was man unter dieser Reduzierbarkeit versteht – den Abstraktionstyp der inhaltlichen Wahrheit oder die Typen der Herleitung aus Axiomen. Bedenkt man beide Möglichkeiten, so erhält man den Eindruck, dass, wenn man über die Zusammenfassung der Gesetze spricht, wir gar nicht verstehen, worüber wir reden.