Paul Cohen, seine Frau Christina (rechts)
und Peter Hilton aus Binghampton (links).

Die weltweit besten mathematischen Artikel im 21. Jahrhundert

7

Paul Cohen

Wie ich »Forcing« entdeckte

enterprise

Über das Buch

Paul Cohen (1934-2007) hat sich mit den Grundlagen der Mathematik beschäftigt. Hochtalentiert, kommunikativ und kritisch setzt er sich mit den Ergebnissen von Cantor, Gödel und Zermelo/Fraenkel auseinander. Er hinterfragt die Gültigkeit der Kontinuumshypothese und des Auswahlaxioms. Mit den üblichen Beweistechniken kommt er nicht weiter. So schafft er eine neue, abstrakte Methode, das Forcing. Für seine Ergebnisse, nämlich dass die Kontinuumshypothese und das Auswahlaxiom unabhängig von der Zermelo-Fraenkel-Mengentheorie sind, erhält er 1966 die Fieldsmedaille.

Auf der Konferenz über abelsche Gruppen und Module im Juli 2001 in Honolulu (Hawaii) gibt er nun Rückblick auf seinen Schaffensprozess. Er schildert seine Erlebnisse und Einflüsse ohne in technische Details zu gehen. Obwohl das Thema recht abstrakt ist und die Verneinung logischer Eigenschaften und Beziehungen zwischen Objekten noch abstrakter und somit (kaum) vorstellbar sind, kann wohl nur Paul Cohen mit Meisterschaft damit umgehen.

Wie ich Forcing entdeckte ist ein sehr persönliches Buch, das Leserinnen und Leser sowohl fordert als auch unterhält. Es stellt die Frage nach Eigenschaften und Zusammenhang diskreter und kontinuierlicher Universen und Mengen.

Fotos von Yuichiro Yamanishi mit experimentellen Motiven greifen die Thematik der Dualität diskreter und kontinuierlicher Welten auf. Zahlreiche Abbildungen erleichtern das Verständnis. Ein Glossar erläutert die wichtigsten Begriffe.

Wie ich »Forcing« entdeckte

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Ich möchte damit beginnen, den Organisatoren dieser Konferenz zu danken, dass sie mich eingeladen haben – und vor allem meinem Freund Adolf Mader,[1] den ich zuerst bei einem Semesteraufenthalt in Hawaii vor 9 Jahren getroffen habe. Meine Kenntnisse über abelsche Gruppen sind sehr beschränkt, aber seit sich herausgestellt hat, dass die Forcing-Methode eine Rolle bei diesem Thema spielt, gibt es doch ein paar Bezüge zu ihnen. Ich erinnere mich sehr gut an meine erste Begegnung mit abelschen Gruppen. Sie geschah durch die Monografie von Irving Kaplansky[2] über unendliche abelsche Gruppen, die gerade herauskam, als ich in

1 Adolf G. Mader ist deutscher Mathematiker (*1934), der in Tübingen studierte, nach seiner Promotion 1964 an der New Mexico State University an der University of Hawaii lehrte und seit 2006 emeritiert ist, siehe https://math.hawaii.edu/wordpress/people/adolf/, Aufruf am 28.09.2017.

2 Irving Kaplansky (1917-2006) war polnisch-jüdisch-kanadisch-amerikanischer Mathematiker. Cohen meint das Buch: I. Kaplansky: *Infinite Abelian Groups.* University of Michigan Press, 1954. , https://en.wikipedia.org/wiki/Irving_Kaplansky, für die Bedeutung des Buches siehe http://www.ams.org/journals/bull/1955-61-01/S0002-9904-1955-09877-X/S0002-9904-1955-09877-X.pdf, Aufruf am 28.09.2017.

den 50er Jahren Doktorand an der Universität von Chicago war. Ich erinnere mich, das Buch oberflächlich gelesen zu haben, und war dennoch überrascht über die Rolle, die die Ordinalzahlen in Ulms Theorem spielten. Zu dieser Zeit hatte Kaplansky in Chicago einen lebendigen und energischen Einfluss. Er stellte die Algebra sicherlich sehr gut uns Studenten gegenüber dar. Während meines ersten Jahres studierte ich begierig viele Themen, dazu zählten Algebra, viel Ringtheorie und algebraische Zahlentheorie. Ich habe gelernt, dass Reinhold Baer[3] einer der Pioniere der abelschen Gruppentheorie war, und ich kann erzählen, wie es war, als er in den *Urbana Seminaren* auftauchte. Damals, in Chicago, lag Algebra in der Luft, vielleicht mehr als die Analysis. Bevor ich mich endgültig entscheiden würde, durch die Wahl von Antoni Zygmund[4] als

3 Reinhold Baer (1902-1979) war jüdisch-deutscher Mathematiker, der auf dem Gebiet der Gruppentheorie arbeitete. Baer musste 1933 emigrieren und war von 1935-1956 in den USA. Paul Cohen war 1953-58 in Chicago. 1958 war Baer Gastprofessor an der Universität von Chicago, siehe http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Baer.html, https://de.wikipedia.org/wiki/Reinhold_Baer, Aufruf am 03.10.2017.

4 Antoni Zygmund (1900-1992) war polnisch-ameri-

Betreuer zu meinen früheren Interessen der Analysis zurückzukehren, war ich von der Schönheit der Algebra fasziniert. Die Universität von Chicago hatte in dieser Zeit ihr Goldenes Zeitalter, was glücklicherweise mit meinem Aufenthalt zusammenfiel. Die Begeisterung während meiner Studienzeit kam vor allem durch Kaplanskys Enthusiasmus, durch seine vielen Seminare und den daraus entstehenden Schriften und Monografien. Ich sollte ebenso Peter Hiltons[5] wunderschönen Vortrag über die Entstehung der homologischen Algebra erwähnen. Außerdem gab es große Aufregung um die Kurse von Saunders MacLane[6] in Topologie, den

kanischer Mathematiker. Er promovierte an der Warschauer Universität, emigrierte nach den USA und war seit 1947 an der Universität von Chicago, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Antoni_Zygmund, Aufruf am 28.09.2017.

5 Peter Hilton (1923-201) war britischer Mathematiker. Es arbeitete auf dem Gebiet der Homotopietheorie und der Kryptographie. Hilton war in dieser Sache auch im 2. Weltkrieg für die Royal Artillery tätig. Er arbeitete mit Alan Turing zusammen und wurde von John Henry Whitehead promoviert, siehe 9. Fußnote und https://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Hilton, Aufruf am 05.10.2017.

6 Saunders MacLane (1909-2005) war amerikanischer Mathematiker, er gilt als einer der Begründer der Kategorientheorie, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Saunders_Mac_Lane, Aufruf am 28.09.2017.

K(π, n)-Räumen und den Besuch von Henri Cartan,[7] als er über die Berechnung der homologischen Struktur dieser Räume vortrug. So, nun hoffe ich einige Referenzen für die Teilnahme an einer Algebra-Konferenz gemacht zu haben.

Während dieser Konferenz war ich von der Vitalität der abelschen Gruppen sehr beeindruckt und ebenso durch etwas, was ich nicht oft in solchen Meetings gesehen habe – einen starken Geist von Kollegialität und Freundschaft unter den Teilnehmern, ohne Zweifel verstärkt von der natürlichen Schönheit Hawaiis und der harten Arbeit der Organisatoren.

Ich verstehe meine Aufgabe so, dass ich die Hintergründe meiner Arbeit in der *AET-Theorie*[8] aufzeige und einen groben Überblick über die Forcing-Methode gebe. Die Forcing-Methode habe ich eingeführt, um verschiedene unabhängige Resultate zu erzielen.

7 Henri Cartan (1904-2008) war bedeutender französischer Mathematiker, er arbeitete auf dem Gebiet der algebraischen Topologie und war Mitglied von Bourbaki, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Cartan, Aufruf am 28.09.2017.

8 Affective Events Theory

Ihre Entwicklung ist so schnell und so extensiv vorangegangen, dass ich nicht länger kompetent bin, einen umfassenden Überblick zu geben. Natürlich sehe ich mit Befriedigung, dass sie ihre Spuren sogar in den abelschen Gruppen hinterlassen hat, insbesondere bei der Whitehead-Vermutung.[9] Paul Eklof[10] wird genauer darüber sprechen, wie die Mengentheorie in dieses Gebiet vorgestoßen ist.

Die Mengentheorie ist ein Thema, welches zwei widersprüchliche Emotionen bei den meisten Mathematikern anregt. Einerseits ist jedermann mit den Grundlagen vertraut, sodass keine technische Vorbereitung nötig ist. Außerdem hat jeder seine eigene persönliche Ansicht über die Natur der Mengen und bis zu welchem Grade sie zu konstruktiven oder nicht-konstruktiven Methoden passen. Sie mögen fühlen, dass

9 John Henry Constantine Whitehead (1904-1960) war britischer Mathematiker und einer der Begründer der Homotopietheorie, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/J. _H. _C. _Whitehead, Aufruf am 28.09.2017.

10 Paul Eklof (* ca. 1940) war Professor für Mathematik an der University of California in Irvine zur Zeit des Vortrages von Paul Cohen, siehe https://www.math.uci.edu/~peklof/peklofv.html#1, Aufruf am 03.10.2017.

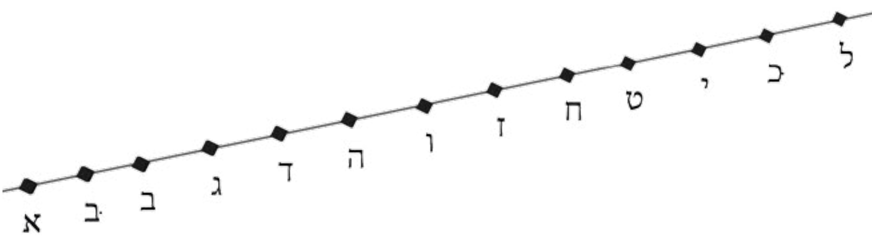
die »offizielle« Darstellung der Mengentheorie, d.h. all diese Mathematik, die formale Systeme und spezielle Axiomensysteme benutzt, wenig Relevanz zu ihrer Arbeit als forschende Mathematiker hat. Andererseits hat eine ganze Reihe von überraschenden Resultaten die Selbstgefälligkeit vieler Mathematiker zerbrochen, und es scheint eine unberechtigte mystische Aura und Ehrfurcht um das ganze Thema herum zu geben. Insbesondere ist die Existenz von *vielen* möglichen mathematischen Modellen beim ersten Zusammentreffen nur schwer zu akzeptieren, sodass eine mögliche Reaktion sehr gut so sein kann: Irgendwie passt die axiomatische Mengenlehre nicht in das intuitive Bild des mathematischen Universums und ihre Resultate sind kein echter Teil der normalen Mathematik. In meinen Vorträgen will ich einen Teil dieser Verwirrungen auflösen und Sie überzeugen, dass diese Ergebnisse tatsächlich leicht zu akzeptieren sind – auch für einen Amateur. Ich kann bestätigen, dass in meiner eigenen Arbeit – beim Beweisen unabhängiger Resultate – es das Schwierigste war, psychische Angst beim Nachdenken über die Existenz verschiedener Modelle der Mengentheorie zu überwinden – so als wären sie natürliche Objekte der Mathematik, bei denen man die natürliche mathematische Intuition benutzen kann.

Frege und Cantor

Wenn man die Entwicklung der Logik und Mengenlehre überschaut, dann findet man da einige recht klare Abgrenzungen. Zuerst gibt es eine Periode von rein philosophischem Denken über die Logik, die meiner Meinung nach zum Gebiet des vormathematischen Denkens zählt. Sie endet irgendwo in der Mitte des 19. Jahrhunderts mit den Ausführungen von Boole und anderen, die erkannten, dass es eine Mathematik der Wahrheit und Unwahrheit gibt, die wir heute boolsche Algebra nennen. Den nächsten wichtigen Schritt können wir – ohne zu weit abzuschweifen – Gottlieb Frege[11] zuschreiben, auch wenn einige andere Leute daran

11 Gottlieb Frege (1848-1925) war deutscher Logiker und

beteiligt waren. Er hatte erkannt, dass mathematisches Denken Variablen, Aussagen oder Beziehungen enthält sowie Quantifikatoren wie zum Beispiel: *es existiert* oder *für alle*, was sich auf die Variablen bezieht. In seiner *Begriffsschrift* erklärte er, wie alle diese Symbole manipuliert sind, und mittels Beispielen überzeugte er

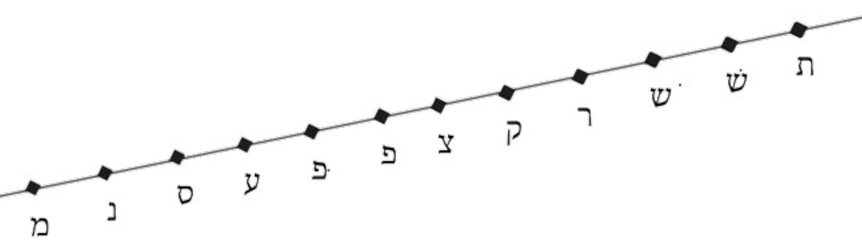


vermutlich sich selbst und andere, dass diese Notation alles war, was man brauchte, um mathematisches Den-

Philosoph, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege, Aufruf am 01.10.2017.

ken auszudrücken. Heute würde man sagen, dass er genaue Regeln des Prädikatenkalküls vorgab.

In einer parallelen Entwicklung entwickelte Georg Cantor[12] die Mengentheorie, vor allem seine Theorie



der Kardinal- und möglicherweise sogar weit wichtiger noch – seine Theorie der Ordinalzahlen. Obgleich Can-

12 Georg Cantor (1845-1918) war deutscher Mathematiker und Begründer der Mengenlehre.Er schuf die Ordinal- und Kardinalzahlen, entwarf die beiden Diagonalverfahren, um zu beweisen, dass die rationalen Zahlen abzählbar bzw. die reellen überabzählbar sind.